УДК 620.317

ЗАСТОСУВАННЯ МОДУЛЯРНОЇ АРИФМЕТИКИ У БАГАТОШКАЛЬНИХ ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАННЯХ

ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ В МНОГОШКАЛЬНИХ ФАЗОВИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

APPLICATION OF MODULAR ARIFMETICS IN MULTISCALE PHASE MEASUREMENTS

Ю. Куц доктор технічних наук, професор кафедри приладів та систем неруйнівного контролю Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

Ю. Куц, Y. Kuts,

Розглянуто використання медулярної арифметики для розв'язання прикладних завдань багатошкальної фазометрії. Проаналізовано особливості застосування числової системи залишкових класів (СЗК) для опрацювання даних фазовимірювальних експериментів. Наведено умови зведення завдання усунення фазової багатозначності у фазових далекомірах та пеленгаторах до відновлення цілого числа з його представлення в СЗК. Показано, що фазовий метод вимірювання у сукупності із СЗК набуває нових властивостей – здатності до контролю вірності розв'язання багатозначності та можливість пошуку і виправлення помилкових результатів фазових вимірювань.

Рассмотрено применение модулярной арифметики для решения прикладніх задач многошкальной фазометри. Проанализировані особенности использования числовой системы остаточных классов (СОК) для обработки данных фазоизмерительніх экспериментов. Приведены условия сведения задачи устранения фазовой многозначности в фазовых дальномерах и пеленгаторах к восстановлению целого числа из его представления в СОК. Показано, что фазовый метод измерения в совокупности с СОК приобретает новые свойства – способность к контролю правильности разрешения многозначности и возможность поиска и исправления ошибочных результатов фазовых измерений.

The application of modular arithmetic for the solution of applied problems of multi-scale phaseometry is considered. Analyzed features of the use of a numerical system of residual classes (SOK) for processing data of phase-measurement experiments. The conditions of the problem of elimination of phase polysemy to the restoration of an integer from its representation in the SRC are given. It is shown that the phase measurement method in the aggregate from the SRC acquires new unique properties - the ability to control the fidelity of the decision of ambiguity and the ability to search and correct the false results of phase measurements. The use of SRC for processing the results of measurements in phase range finders and dippers is illustrated. The results obtained can be used to process the measurement data in the case of their representation by the phase shift of signals.

Ключові слова: багатошкальні фазові вимірювання, система залишкових класів, багатозначність, , фазовий далекомір, фазовий пеленгатор**.**

Keywords: multiscale phase measurements, residual classes, ambiguity, phase range finder, phase direction finder.

Вступ. Фазовий метод вимірювання, перетворення і передавання інформації, завдяки високій чутливості, прецизійності та завадозахищеності знаходить застосування в різних галузях – інформаційно-вимірювальній техніці, експериментальній фізиці, локації, навігації, радіотехніці, зв'язку, захисті інформації тощо [1-4].

Найчастіше цей метод передбачає використання щонайменше однієї пари гармонічних сигналів з фазовим зсувом φ між ними як інформативним параметром. Зазвичай цей параметр зв'язаний з вимірюваною фізичною величиною $L \in [0,\ L_{\max}]$, де $L_{\max}$ – максимальне вимірюване значення, залежністю виду

$$\varphi(L) \equiv kF(L) \bmod 2\pi, \tag{1}$$

де k − розмірний коефіцієнт перетворення, $F(L)$ − деяка функція від L. Наприклад, в завданні вимірювання відстані фазовим методом [3, 4] цей коефіцієнт дорівнює $k = 2\pi/\lambda$, де λ − довжина хвилі у середовищі її поширення вздовж відстані L, а $F(L) = L$. В цьому випадку $\varphi(L)$ є порівнянним з kL за модулем 2π, що визначає нелінійний характер перетворення (1) у значному динамічному діапазоні.

В цілому гомоморфність перетворення $F(L)$ у $\varphi(L)$, якщо $kL \geq 2\pi$, приводить до неоднозначності вимірювання. Тому більш повна реалізація фазового методу передбачає необхідність однозначного визначення великих фазових зсувів сигналів виду $\Phi(L) = kF(L) = 2\pi n(L) + \varphi(L)$, $n = 0, 1, 2, ...$. Така задача відома як розв'язання (усунення, розрізнення, стикування шкал) фазової неоднозначності і має розв'язки, які ґрунтуються на додаткових i=1, 2, … фазових вимірюваннях, наприклад на декількох нижчих частотах (тобто з меншим k_i і, відповідно, меншою точністю вимірювання L) [3-5]. В цьому випадку вимірювання на кожній з частот утворює свою шкалу з відповідним коефіцієнтом перетворення, а власне методи подолання багатозначності ґрунтуються на послідовному перерахунку результатів вимірювань з однієї шкали на іншу (у разі, якщо для однієї зі шкал виконується умова однозначності: $k_i L_{\max} < 2\pi$, що має місце у фазових далекомірах [3]), або на переборі всіх можливих значень n (якщо n може набувати невеликих значень, як це реалізується, наприклад, у фазових пеленгаторах [6]) і виборі найбільш імовірного за певним критерієм значення.

Внаслідок, імовірнісної природи як процесів формування фазових зсувів сигналів та їх поширення у середовищі, так і реалізації процедури вимірювання фазових зсувів, завжди лишається кінцевою ймовірність отримання правильного розв'язку неоднозначності багатошкальних фазових вимірювань.

В той же час існує інша можливість розв'язання неоднозначності фазових вимірювань, яка ґрунтується на використанні для таких вимірювань числової системи залишкових класів (СЗК) [7- 9]. Ця ідея ґрунтується на подібності модульного принципу отримання як числових даних у СЗК, так і фазових зсувів сигналів (1).

Найбільш активно СЗК використовувалась у галузі обчислювальної техніка для побудови відмовостійких швидкодіючих засобів обчислень [7, 9,]. В роботі [11] запропоновано використання СЗК для опрацювання інтерферограм і визначеня повної фази, яка відповідає різниці хода променів у плечах інтерферометра. Однією з перших робіт з питання застосування СЗК для оброблення результатів фазових вимірювань є стаття [12]. У подальшому ця ідея розроблялась автором в роботах [13-15].

Мета статті полягає в узагальненні та розвитку теоретичних засад фазового методу вимірювань, які ґрунтуються на використанні СЗК для опрацювання результатів багатошкальних фазових вимірювань. Така можливість основана на подібності модульного представлення результатів фазових вимірювань (1) та подання цілих чисел A в СЗК лишками виду $a_i \equiv A \bmod p_i$, де цілі $p_i > 1$ – модулі СЗК.

Визначення та теореми СЗК. Сутність СЗК полягає у поданні цілих чисел A **з** певного робочого інтервалу $\left[0, A_{\text{р}}\right)$ множиною невід'ємних залишків $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Цілі числа $a_i, i = \overline{1,m}$ утворюються від ділення A на інші цілі взаємно прості числа p_i, $i = \overline{1,m}$ – модулі системи (або основа СЗК), тобто $a_i \equiv A \bmod p_i$**,** $a_i \in [0,\ p_i)$**.** Множина всіх залишків за кожним модулем $\alpha_i \equiv A \bmod p_i$, $i = \overline{1,m}$ утворює кільце цілих чисел $\alpha_i \in [0,\ p_i)$ за відповідним модулем.

Один зі способів відновлення чисел A у позиційний системі числення з $A_{\text{СЗК}}$ ґрунтується на китайській теоремі про залишки [9]: відновлення A можливе у випадку взаємооднозначної відповідності A та $A_{\text{СЗК}}$, що досягається виконанням наступних умов: 1) модулі системи є взаємно простими числами; 2) максимальне відновлюване число задовольняє нерівність $A_{\max} < A_{\text{р}} = \prod_{i=1}^{m} p_i$. За виконання цих умов існує обернене перетворення $A_{\text{СЗК}} \Rightarrow A$. Число A може бути обчислене, наприклад, за алгоритмом

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i B_i \left(\operatorname{mod} A_{\text{р}}\right), \tag{2}$$

де $(B_1, ...B_i, ...B_m)$ – система ортонормованих базисів, яка обчислюється для вибраних модулів системи і може бути визначена, наприклад, за викладеною в [7] методикою.

Приклад 1. Розглянемо представлення числа A=31 в СЗК за системою модулів (5, 7): $A_{\text{СЗК}} = (1,\ 3)$. Для обраної системи модулів максимальне відновлюване число $A_{\max} = 34$. Система ортонормованих базисів дорівнює $B = (21,\ 15)$. Умова ортонормованості полягає у виконанні для елементів базису сукупності співвідношень:

$$B_1 \operatorname{mod} p_1 = 21 \operatorname{mod} 5 = 1,\ B_1 \operatorname{mod} p_2 = 21 \operatorname{mod} 7 = 0,$$

$$B_2 \operatorname{mod} p_1 = 15 \operatorname{mod} 5 = 0,\ B_2 \operatorname{mod} p_2 = 15 \operatorname{mod} 7 = 1.$$

Результат обчислення за (2) дає значення

$$A = \left(1 \cdot 21 + 3 \cdot 15\right)(\operatorname{mod} 5 \cdot 7) = 66 \operatorname{mod} 35 = 31.$$

Основні теореми про СЗК наведені в [7 - 9]. Для обґрунтування використання СЗК для фазометрії важливе значення відіграє наступна теорема.

Теорема 1. Якщо число $A \in R$ і модуль $p_i \in N$ мають спільний множник $a \in N$, то

$$A \operatorname{mod} p_i = a\left[\frac{A}{a} \operatorname{mod}\left(\frac{p_i}{a}\right)\right]. \tag{3}$$

У справедливості (3) можна пересвідчитись в такий спосіб. Нехай $A = ab$, $p_i = ac$. Позначимо цілу частину частки: $\left[A/p_i\right]^+ = \left[b/c\right]^+ = k$. З визначення залишку числа маємо $A \operatorname{mod} p_i = ab - kac = a\left(b - kc\right) = a\left[b \operatorname{mod} c\right] = a\left[\frac{A}{a} \operatorname{mod}\left(\frac{p_i}{a}\right)\right]$, що доводить (3).

Теорема 1 дає формальні підстави виконувати модульні операції по-перше з дійсними числами, по-друге – з іменованими числовими значеннями фізичних величин. Нехай, наприклад, фізична величини і її одиниця вимірювання мають числові значення A і p_i та розмірність [A]. Тоді на основі (3) маємо

$$\left\{A\left[A\right]\right\} \operatorname{mod}\left\{p_i\left[A\right]\right\} = \left(A \operatorname{mod} p_i\right)\left[A\right]. \tag{4}$$

З формули (3) випливає і інший важливий для вимірювання наслідок: якщо фізична величина змінюється за циклами, які не є цілими числами, існує можливість звести модульні операції з такими величинами до операцій з цілими числами. Як приклад розглянемо дробову частину повного фазового зсуву сигналів

$$\left[\Phi\left(L\right)\right] \operatorname{mod} 2\pi = 2\pi\left[\frac{\Phi\left(L\right)}{2\pi} \operatorname{mod} 1\right] \text{ [рад]}. \tag{5}$$

З метою оптимізації обчислювальних витрат (або за особливих обмежень проведення фізичного експерименту) інколи необхідно визначити залишок $\alpha_i = A \operatorname{mod} p_i$ з результатів обчислень за іншим модулем p_j. Такий перерахунок також виконується на основі теореми 1. Її застосування для цієї задачі дає наступний результат:

$$\alpha_i = A \operatorname{mod} p_i = \frac{p_i}{p_j}\left(\frac{A n_j}{p_i} \operatorname{mod} p_j\right). \tag{6}$$

Якщо, наприклад, вибрати $p_j = 2^g$, то залишок α_i утворюватиметься автоматично в результаті виконання операцій Ap_j / p_i в арифметичному пристрої у разі обмеження його розрядної сітки g двійковими розрядами.

Важливою властивістю СЗК є можливість організації контролю (чи навіть виправлення) помилок, які виникають під час отримання залишків, виконання арифметичних операцій з ними та відновлення цілих чисел. Для цього основу СЗК доповнюють додатковим модулем $p_{m+1} > p_i$, $i \in \overline{1,m}$ (чи декількома модулями). Нова СЗК (повна система) має повний діапазон перетворення чисел $\left[0,\ A_{\text{п}}\right)$, де $A_{\text{п}} = \prod_{i=1}^{m+1} p_i = A_{\text{р}} p_{m+1}$. Систему модулів $\left(p_1, ..., p_i, ..., p_{m+1}\right)$, яка задовольняє умову $p_1 < p_2 < ... < p_{m+1}$, називають упорядкованою, а представлення $A_{СЗК,i} = \left(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{m+1}\right)$, отримане з $A_{\text{СЗК}}$ вилученням залишку α_i, називають проекцією числа A за модулем p_i. Довільну помилку в одному залишку $A_{\text{СЗК}}$ називають однократною, у двох залишках – двократною, в декількох – багатократною. Теоретичне обґрунтування можливості виявлення помилок у $A_{\text{СЗК}}$ дає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай модулі упорядкованої системи залишкових класів $p_1, p_2, ...p_m, p_{m+1}$ є взаємно простими числами і нехай $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_k, ..\alpha_{m+1}\right)$ – правильне число. Тоді число $\tilde{A} = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..\tilde{\alpha}_k \neq \alpha_k, ..\alpha_{m+1}\right)$ – неправильне число.

Отже довільне спотворення одного із залишків, якими представляється число $A < A_{\text{р}}$ в СЗК, переводить його у разі відновлення в позиційній системі в інтервал $[A_{\text{р}},\ A_{\text{п}})$. Процес переходу в повний діапазон неправильного числа зі спотворенням одного залишку і повернення числа в робочий діапазон після виправлення залишку показано на рис. 1.

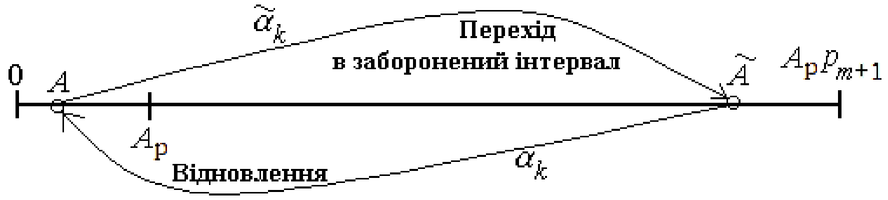

Рис. 1. Графічна ілюстрація процесу спотворення і відновлення цілого числа *A*
Fig. 1. Graphic illustration of the process of distortion and restoration of integer *A*

Спотворення будь-якого залишку в новому представленні $\left(a_1, ..., a_{m+1}\right)$ приводить до того, що відновлене число $\tilde{A} = \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i B_i'\right)\left(\mathrm{mod}\, A_{\text{п}}\right)$, де $(B_1', ...B_i', ...B_{m+1}')$ – нова система ортонормованих базисів, переходить з робочого діапазону $\left[0, A_{\text{р}}\right)$ (з діапазону т.з. правильних чисел) в заборонений діапазон $\left[A_{\text{р}},\ A_{\text{р}} p_{m+1}\right)$, що є ознакою помилки.

Теорема 2 дає теоретичне підґрунтя для виявленням і виправленням помилок в даних, поданих кодами СЗК. Критерієм відсутності помилки в $A_{СЗК}$ є виконання умови

$$A = \left[\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i B_i\right]\left(\mathrm{mod}\, A_n\right) < A_p. \quad (7)$$

Перевіркою умови (7) можна виявити не тільки однократні, але й частину багатократних помилок в $A_{\text{СЗК}}$.

Перевірку неушкодженості $A_{\text{СЗК}}$ можна виконати і в інший спосіб – шляхом порівняння різних проекцій відновленого числа на основі наступної теореми. За даними [7] введення лише одного додаткового модуля $p_{m+1} > p_m$, $i = \overline{1,m}$ дозволяє виявляти всі одиночні помилки і близько 95% подвійних помилок.

Теорема 3. Нехай в СЗК з модулями $p_1, p_2, ...p_m, p_{m+1}$, які є взаємно простими числами, і які задовольняють умову $p_1 < p_2 < ... < p_{m+1}$, задано правильне число $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_k, ...\alpha_{m+1})$. Відновлені за проекціями $A_{СЗК,i}$ за різними основами СЗК числа A_1, $A_2, ...A_i...A_{m+1}$ збігаються, тобто

$$A_1 = A_2 = ... = A_i = ... = A_{m+1} = A. \tag{8}$$

Якщо $A > A_\text{р}$, а проекція $A_i < A_\text{р}$, це свідчить про наявність помилки в *i*-му залишку. Корекція виявлених помилок потребує додаткових обчислень і може бути виконана за наведеними в [7, 14 11] методами.

Застосування СЗК для вимірювання відстані у фазових далекомірах.

Нехай гармонічний сигнал (наприклад, електромагнітної чи акустичної природи) поширюється вздовж відстані *D* в прямому та зворотному напрямках, що приводить до фазового зсуву $\Phi(D) = 4\pi D\lambda^{-1}$ між сигналами

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \sin(2\pi ft), \quad t \in [0,\ T_c]; \\ u_2(t,x) &= U_2 \sin[2\pi ft - \Phi(D)], \quad t \in [0,\ T_c], \end{aligned} \tag{9}$$

де $T_\text{с}$, f – відповідно час спостереження та частота сигналу. Доступним вимірюванню є

$$\varphi(D) \equiv \Phi(D) \bmod 2\pi \equiv 4\pi \mathrm{D} \lambda_i^{-1} \bmod 2\pi. \tag{10}$$

Нехай визначається фіксоване значення відстані в інтервалі $D \in (0,\ D_{\max})$ незмінне на інтервалі часу спостереження $T_\text{с}$ з дискретним кроком d_0. Організуємо вимірювання фазових зсувів сигналів виду (9) на *m* частотах $\{f_i, i = \overline{1,m}\}$ з довжинами хвиль $\lambda_i << D_{\max}$. Робочі частоти виберемо кратними взаємно простим числам p_i, $i = \overline{1,m}$ відповідності до

$$f_i = \frac{1}{p_i \tau_0} = \frac{v}{p_i d_0} = \frac{v}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

де ν – швидкість поширення хвиль у середовищі.

Множина гармонічних сигналів з частотами (11) є множиною з ортогональними компонентами на часовому інтервалі

$$T_\text{опт} = d_0 / \nu \prod_{i=1}^{m} p_i, \tag{12}$$

що дозволяє виконувати фазові вимірювання як послідовно в часі, так і одночасно на всіх частотах, тобто застосовувати, як вимірювальний, полігармонічний сигнал.

Результатом вимірювання є фазові зсуви, які утворюють вектор $\overline{\varphi_m} = (\varphi_1, ...\varphi_i, ...\varphi_m)$; для кожного і-го фазового зсуву має місце порівняння: $\varphi_i(D) \equiv \dfrac{2D}{\lambda_i} 2\pi (\bmod 2\pi)$. Вектор $\overline{\varphi_m}$ однозначно визначає відстань *D*.

Домножимо порівняння (10) на $p_i / 2\pi$:

$$\frac{\varphi_i(D)}{2\pi} p_i \equiv \frac{2D}{\lambda_i} p_i (\bmod p_i). \tag{13}$$

Виберемо дискретний крок вимірювання фазових зсувів сигналів згідно з виразом

$$\Delta\varphi_i = 2\pi / p_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{14}$$

Тоді порівняння (13) можна переписати як

$$\frac{\varphi_i(D)}{\Delta\varphi_i} \equiv \frac{2D}{d_0} (\bmod p_i). \tag{15}$$

Взявши до уваги лише цілі частини порівняння (15) отримаємо залишки

$$a_i(D)=\left[\varphi_i(D)/\Delta\varphi_i\right]^+, \quad (16)$$

де $[\ ]^+$ – позначення операції визначення цілої частини числа.

Вибір значень $\Delta\varphi_i$ і процесу визначення лишків $\alpha_i(D)$ для системи модулів (5, 7) ілюструє рис. 2. На цьому рисунку A=24, $A_{\text{СЗК}}$=(4, 3).

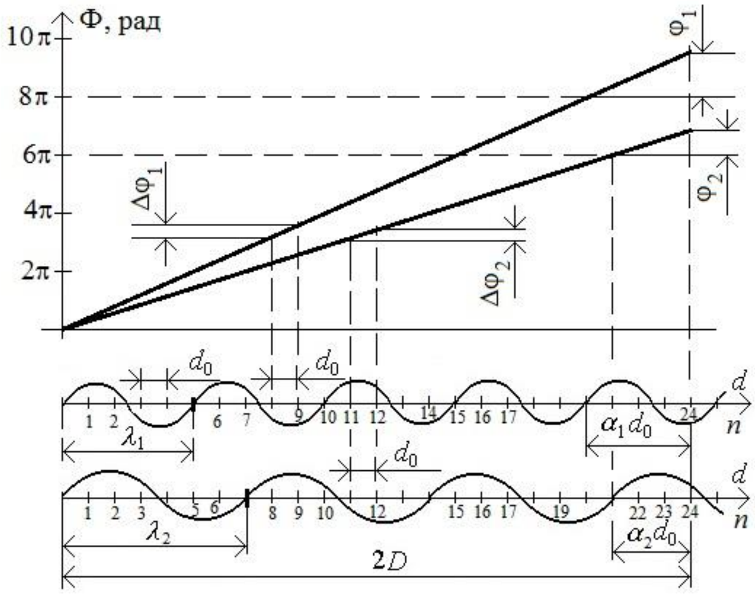

Рис. 2. Графічне ілюстрація процесу представлення результатів вимірювання фазових зсувів сигналів (відстані) цілими числами в СОК з системою модулів (5, 7)

Fig. 2. Graphical illustration of the process of presenting the results of measuring phase shifts of signals (distances) by integers in the JOC with the system of modules (5, 7)

Для всіх $i=\overline{1,m}$ частот складається система порівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(D)\equiv A(D)(\operatorname{mod} p_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_i(D)\equiv A(D)(\operatorname{mod} p_i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m(D)\equiv A(D)(\operatorname{mod} p_m). \end{cases} \quad (17)$$

В (17) число $A(D)$ дорівнює кількості відрізків довжиною $0{,}5d_0$, що вкладається на вимірюваній відстані, а $\alpha_i(D)$ – залишки цього числа за модулями p_i, $i=\overline{1,m}$. Таким чином, накладені на вибір частот та дискретність вимірювання фазових зсувів початкові умови (11) та (14) дозволяють подати числовий результат вимірювання $A(D)$ залишками цього числа за системою модулів $(p_1,\dots p_i,\dots p_m)$ і звести задачу розв'язання неоднозначності фазових вимірювань до задачі відновлення числа $A(D)$ з його представлення в СЗК – $A(D)_{\text{СЗК}}=(\alpha_1(D),\dots\alpha_i(D),\dots\alpha_m(D))$.

За належного вибору p_i та m результат вимірювання відстані обчислюється як

$$D=\frac{d_0}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\varphi_i(D)}{\Delta\varphi_i}\right]^+ B_i\right](\operatorname{mod} A_{\text{p}}). \quad (18)$$

Таким чином, визначення відстані подібне відновленню числа А за його поданням $A_{\text{СЗК}}$, а між даними СЗК та параметрами сигналів існує відповідність:

$$n_i \Rightarrow f_i,\ a_i \Rightarrow \varphi_i,\ A \Rightarrow \Phi \quad (5.32)$$

Такий спосіб усунення багатозначності фазових вимірювань ілюструє наступний приклад [13].

Приклад 2. Вимірюється відстань 1955,1 м з дискретністю 1 м, тобто D=1955,1 м, d_0=1 м, модулі СЗК: $p_1 = 13$, $p_2 = 17$, $p_3 = 19$. Використовуються електромагнітні хвилі, для яких $\nu = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Робочий діапазон СЗК становить: $A_р = p_1 p_2 p_3 = 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4199$.

Перевірка умови однозначного вимірювання відстані – $D < D_{\max}$, дає результат:

$$D_{\max} = 0,5 d_0 A_{\max} = 0,5 \cdot 4198 = 2099 \text{ м} > D.$$

Розрахунок частот згідно з (11) дає значення:

$$f_1 \approx 23,077 \text{ МГц}, \quad f_2 \approx 17,647 \text{ МГц}, \quad f_3 \approx 15,789 \text{ МГц}.$$

Ортонормовані базиси для обраної системи модулів СЗК:

$$B_1 = 1938, \quad B_2 = 494, \quad B_3 = 1768.$$

Перевірка умови правильності визначення базисів:

$$\left[\sum_{i=1}^{3} B_j\right]\left(\mathrm{mod}\, A_р\right) = \left[1938 + 494 + 1768\right]\left(\mathrm{mod}\, 4199\right) = \left[4200\right]\left(\mathrm{mod}\, 4199\right) = 1.$$

Розрахунки вихідних даних – значень $\Delta\varphi_i$ (14) та $\varphi_i(D)$ (10), зведені в табл. 1.

Таблиця 1. Значення $\Delta\varphi_i$ та $\varphi_i(D)$ за даними прикладу 2

Параметри	f_1	f_2	f_3
$\Delta\varphi_i$, рад	0.4833	0.3696	0.3307
$\varphi_i(D)$, рад	4.9361	0.0691	4.9876

На етапі опрацювання даних спочатку визначаються залишки $\alpha_i(D)$ (16), що (за відсутності похибок вимірювань) дає значення: $\alpha_1(D) = 10$, $\alpha_2(D) = 0$, $\alpha_3(D) = 15$.

Результат вимірювання відстані відповідно до (18) формується наступним чином

$$D = 0,5 \cdot \left[10 \cdot 1938 + 0 \cdot 494 + 15 \cdot 1768\right]\left(\mathrm{mod}\, 4199\right) =$$

$$= 0,5 \cdot 45900\left(\mathrm{mod}\, 4199\right) = 0,5 \cdot \left(41990 + 3910\right)\left(\mathrm{mod}\, 4199\right) = 1955 \text{ м}.$$

Фазовий метод дозволяє виконати уточнення отриманого в межах одного дискрету СЗК результату. Проте слід відзначити, що модульна арифметика потребує безпомилкових вихідних даних для правильного відновлення чисел. Навіть незначні похибки вимірювання фазових зсувів сигналів можуть привести до спотворення кінцевого результату. Це приводить до проблеми нестійкості розв’язків. Тому вимірювання доцільно проводити в розширеній СЗК та із застосуванням методів виявлення/корекції помилок.

Застосування СЗК для визначення азимуту у фазовому пеленгаторі.

Фазові радіопеленгатори [6] призначені для визначення пеленга – кута між напрямком на об’єкт спостереження (джерела радіосигналів з гармонічною несучою) і однією з площин, прийнятою за початок відліку кутових координат. У авіаційній і морській навігації зазвичай під пеленгом розуміють азимут. Принцип дії радіопеленгаторів ґрунтується на тому факті, що нормаль до фазового фронту плоскої хвилі, яка поширюється в однорідному середовищі, співпадає у просторі з напрямком на джерело випромінювання. Інформацію щодо орієнтації фазового фронту хвилі у просторі отримують з результатів вимірювання та аналіза фазових зсувів між сигналами, які приймаються рознесеними у просторі елементами лінійних антен (рис. 3). Останні повинні мати широкі діаграмами напрямленості та ідентичні фазочастотні характеристики Для підвищення точності визначення пеленга в широкому діапазоні значень використовують антенні системи з декількома базами та збільшують величини баз (під базою розуміється відстань між фазовими центрами антен).

Прийняті сигнали мають вид

$$u\left(t,\alpha_x,l_i\right)=U_i\cos\left[2\pi ft-\varphi_i\left(\alpha_x,l_i\right)\right],\ t\in\left[0,T_\text{c}\right), \tag{19}$$

де $U_i, f, \varphi_i\left(\alpha_x,l_i\right)$ – відповідно амплітуда, частота і початкова фаза сигналу на виході *i*-того елемента антени (*i*=0, 1, 2), $\varphi_{1,2}\in\left[0,2\pi\right)$, $\varphi_0=0$; l_i – база антени; T_c – час спостереження сигналу, $T_\text{c}>1/f$, α_x – вимірюваний азимут.

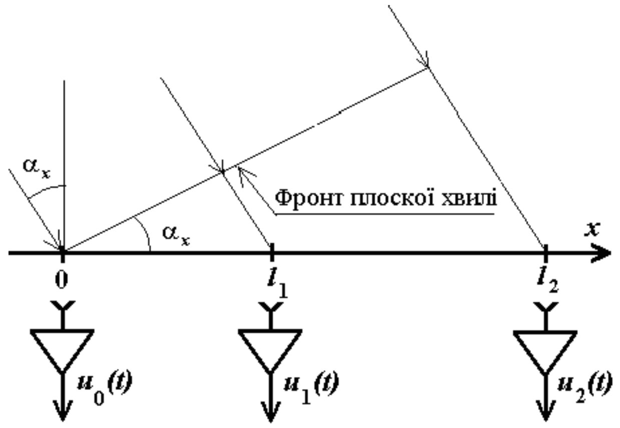

Рис. 3. Схема приймання сигналу рознесеними у просторі елементами антени
Fig. 3. Scheme of signal reception spaced apart antenna elements in space

Елементи лінійної антени у двобазовому фазовому пеленгаторі (рис. 3) рознесені у просторі відносно опорного елемента (з індексом *i*=0) на відстані l_1, l_2. Зазвичай вважається, що відстань від пеленгатора до джерела сигналу набагато більша за l_2, що дозволяє рахувати хвилю плоскою, і крім того $l_1=p_1\Delta l$, $l_2=p_2\Delta l$, де Δl – квант баз антени, p_1, p_2 – цілі числа [6].

Затримка сигналів, що надходять на перший і другий елементи антени відносно нульового становить

$$\tau_i\left(\alpha_x,l_i\right)=l_i\sin\alpha_x/\nu,\ \ i=\overline{1,2}. \tag{20}$$

Повні фазові зсуви сигналів між нульовим та *i*-тим (*i*=1,2) елементами антени аналітично визначаються як

$$\Phi_i\left(\alpha_x,l_i\right)=2\pi l_i\lambda^{-1}\sin\alpha_x,\ \ i=\overline{1,2}. \tag{21}$$

а їх доступні однозначному вимірюванню частини в межах інтервалу $\left[0,2\pi\right)$

$$\varphi_i\left(\alpha_x,l_i\right)=2\pi\Delta lp_i\lambda^{-1}\sin\alpha_x\left(\operatorname{mod}2\pi\right),\ \ i=\overline{1,2}. \tag{22}$$

Модульний характер залежності $\varphi_i\left(\alpha_x,l_i\right)$ від азимуту обумовлює можливість усунення багатозначності таких фазових вимірювань на основі застосування модулярної арифметики.

Отримаємо умови, за яких задача усунення багатозначності фазових вимірювань, відповідно і однозначного визначення азимута α_x у великому секторі кутів, зводиться до задачі відновлення цілого числа з його представлення в СЗК.

Теорема 4. Для того, щоби результати вимірювання у двобазовому фазовому пеленгаторі, у випадку однопроменевого поширення гармонічного сигналу від одного джерела випромінювання, можна було представити залишками в СЗК з модулями $\left(p_1,\ p_2\right)$ необхідно виконання наступних умов:

1) базиси пеленгатора повинні бути кратними модулям $\left(p_1,\ p_2\right)$;
2) кванти вимірювання фазових зсувів сигналів в каналах пеленгатора повинні обиратись з умови: $\Delta\varphi_{1(2)}=2\pi/p_{2(1)}$.

Доведення. Позначимо довжину хвилі у середовищі поширення сигналу λ, а бази пеленгатора – $l_1=p_1\Delta l$, $l_2=p_2\Delta l$, де Δl – квант визначення баз пеленгатора. Нехай хвиля приходить на пеленгатор під кутом α_x. Вимірювання фазових зсувів в інтервалі $[0,\ 2\pi)$ в каналах пеленгатора відбувається без похибок. Повний фазовий зсув в каналах пеленгатора дорівнює $\Phi_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1,(2)}\right) = 2\pi l_{1(2)} \sin\alpha_x / \lambda$.

Для представлення даних пеленгатора в СЗК необхідно забезпечити рівність квантів кута на різних базах. Ця умова трансформується в умову вибору різних квантів вимірювання відстані, яку проходить сигнал у різних каналах пеленгатора. Виходячи з логіки представлення даних в СЗК та з метою узгодження модульних операцій з визначення лишків та довжини хвилі λ необхідно виконати умови

$$\lambda = \lambda_0 p_1 q_1, \quad \lambda = \lambda_0 p_2 q_2, \tag{23}$$

де λ_0 – деяка доля довжини хвилі, $q_1, q_2 \in N$. З (23) витікає, що $p_1 q_1 = p_2 q_2$. Виконання цієї рівності, з урахуванням того, що $p_1, p_2 \in N$, найпростіше виконати поклавши $q_1 = p_2$, $q_2 = p_1$, тоді $\lambda_0 = \lambda / p_1 p_2$. Таким чином квантування відстаней для різних баз необхідно виконати з кроками

$$\Delta\lambda_1 = \lambda / p_2, \quad \Delta\lambda_2 = \lambda / p_1. \tag{24}$$

Тоді лишки, отримувані квантуванням відстані $l_{1(2)} \sin\alpha_x$ квантами (24) визначаються як

$$a_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right) = \frac{l_{1(2)} \sin\alpha_x}{\Delta\lambda_{2(1)}} \bmod p_{1(2)} = \frac{\Delta l \sin\alpha_x}{\lambda_0} \bmod p_{1(2)}. \tag{25}$$

Використовуючи теорему 1 трансформуємо (25) до виду

$$a_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right) = \frac{p_{1(2)}}{2\pi}\left(\frac{2\pi\Delta l \sin\alpha_x}{\lambda_0 p_1 p_2} \bmod p_{1(2)}\right). \tag{26}$$

З (26) маємо значення доступної вимірюванню частини $\Phi_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right)$

$$\frac{2\pi}{p_{1(2)}} a_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right) = \varphi_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right) = \left(\frac{2\pi\Delta l \sin\alpha_x}{\lambda} \bmod 2\pi\right) = \Phi_{1(2)}\left(\alpha_x, l_{1(2)}\right) \bmod 2\pi, \tag{27}$$

що і треба було довести.

Враховуючи вищенаведене направляючий синус, з похибкою до кванту фазового зсуву, обчислюється як

$$\sin\alpha_x = \frac{\lambda}{\Delta l p_1 p_2} A = \frac{\lambda}{\Delta l p_1 p_2}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\left(\alpha_x, l_i\right) B_i\right)\left(\bmod A_{\text{р}}\right). \tag{28}$$

Рівняння (28) дає однозначне в широкому секторі кутів значення азимуту, проте воно має значну похибку квантування, обумовлену величиною квантів $\Delta\varphi_i$. Для підвищення точності визначення α_x за рахунок використання можливостей фазових вимірювачів щодо прецизійного вимірювання фазових зсувів сигналів, в (28) замість числа A необхідно підставити його уточнене (з дробовою частиною) значення

$$\begin{aligned} A_{\text{т}} = {} & \left(a_1\left(\alpha_x, l_1\right) B_1 + a_2\left(\alpha_x, l_2\right) B_2\right) \bmod A_{\text{р}} - \\ & - \left[\frac{p_1}{2\pi}\left(\frac{2\pi\Delta l \sin\alpha_x}{\lambda}\right) \bmod 2\pi\right]^{+} + \frac{p_1}{2\pi}\left(\frac{2\pi\Delta l \sin\alpha_x}{\lambda}\right) \bmod 2\pi \end{aligned} \tag{29}$$

З урахуванням (28) і (29) значення азимуту обчислюється за формулою

$$\alpha_x = \arcsin\left(A_{\text{т}} \frac{\lambda}{\Delta l p_1 p_2}\right). \tag{30}$$

Сектор однозначного визначення азимуту обмежений кутом

$$\alpha_{x,\max} = \arcsin\left(A_{\max} \frac{\lambda}{\Delta l p_1 p_2}\right). \tag{31}$$

Розглянутий спосіб усунення багатозначності визначення азимута у фазових пеленгаторах ілюструє наступний приклад [15].

Приклад 3. Нехай плоска гармонічна електромагнітна хвиля надходить на двобазову лінійну антену (рис. 3) під кутом $\alpha_x = 60,75^\circ$. Задамо відношення $\Delta l/\lambda = 1{,}1$, і нехай бази антени відносяться як $l_1/l_2 = 11/13$. Необхідно визначити азимут α_x за результатами вимірювання фазових зсувів сигналів пеленгатора, застосовуючи для усунення фазової багатозначності СЗК. Похибка вимірювання фазових зсувів сигналів відсутня.

Виходячи з вихідних даних приймемо $p_1 = 11$, $p_2 = 13$, отже $A_\text{р} = 11 \cdot 13 = 143$. Коректність поставленої задачі підтверджується виконанням умови $\alpha_x < \alpha_{x,\max}$:

$$\alpha_{x,\max} = \arcsin\left((11 \cdot 13 - 1) \frac{1}{11 \cdot 13 \cdot 1{,}1} \right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 64,2^\circ > \alpha_x = 60,75^\circ.$$

Розв’язання задачі виконано у два етапи. На першому підготовлено дані для обчислень: ортонормований базис – $B_1 = 66$, $B_2 = 78$; очікувані фазові зсувів сигналів, обчислені за формулами (21), (22), зведені в табл. 2.

Таблиця 2. Обчислені значення $\Phi_i(\alpha_x)$ та $\varphi_i(\alpha_x)$ за даними прикладу 3

Фазовий зсув	База l_1	База l_2
$\Phi_i(\alpha_x)$, рад	66,3328	78,3933
$\varphi_i(\alpha_x)$, рад	3,501	2,9951

На другому етапі власне визначається α_x за триманими фазовими зсувами.

Розрахунок залишків за виразом (27) дає наступний результат:

$$a_1(\alpha_x, l_1) = \left[\frac{13}{2\pi} \cdot 3{,}501 \right]^+ = 7, \qquad a_2(\alpha_x, l_2) = \left[\frac{11}{2\pi} \cdot 2{,}9951 \right]^+ = 5.$$

Визначення числа *A* за (2) дає результат

$$A = (7 \cdot 66 + 5 \cdot 78) \mathrm{mod}(143) = 137,$$

і його уточнене за формулою (8) значення

$$A_\text{т} = 137 - 5 + 5,2435 = 137,2435.$$

Азимут вираховується за (9)

$$\alpha_x = \arcsin\left(\frac{137,2435}{1{,}1 \cdot 11 \cdot 13} \right) \cdot \frac{180}{\pi} = 60,7499^\circ,$$

що відповідає вихідним даним прикладу.

Нижче в табл. 3 подано порівняльний аналіз застосування СЗК для розв’язання багатозначності фазових вимірювань у далекомірах та пеленгаторах.

Таблиця 3. Порівняльний аналіз застосування СЗК у фазових далекомірах і пеленгаторах

№	Характеристика	Фазовий далекомір	Фазовий пеленгатор
1	Вимірюваний параметр *L*, одиниця вимірювання	Відстань, метр	Площинний кут, радіан
2	Характер залежності $\varphi(L)$	Лінійна	Нелінійна
3	Кількість робочих частот	*m*	1
4	Кількість вимірювальних каналів	1	*m* +1
5	Орієнтовна кількість цілих фазових циклів *n*, що визначається однозначно	~ 100…1000	~ 10…40
6	Необхідна кількість модулів СЗК	3…7	2…4

В пеленгаторах на основі СЗК ознакою наявності спотворення одного з лишків є отримання результату, що належить області комплексних чисел.

Таким чином виконані дослідження довели можливість представлення даних вимірювань фазових зсувів сигналів у фазових далекомірах і пеленгаторах в СЗК і усунення на цій основі багатозначності фазових вимірювань. Найбільш важлива властивість СЗК для таких засобів вимірювання полягає у можливості організації контролю правильності усунення багатозначності. Пошук спотворених лишків і їх виключення/виправлення реалізуються шляхом збільшення елементів антени (у пеленгаторі) чи робочих частот (у далекомірі) і певним ускладненням алгоритму оброблення даних вимірювань. Це сприяє збереженню працездатності таких засобів в умовах значного зменшення відношення сигнал/шум, коли імовірність появи грубих помилок усунення багатозначності у різко збільшується.

Висновки

Обгрунтовано використання модулярної арифметики для оброблення результатів вимірювання різних фізичних величин які мають властивість циклічності. Поєднання можливостей СЗК та фазового методу вимірювання забезпечує останньому унікальні властивості, а саме можливість виявлення і виправлення грубих помилок, що можуть виникати в процесі опрацювання даних багатошкальних вимірювань. Це розширює сфери застосування фазового методу вимірювання за рахунок збереження працездатності за більш низьких відношень сигнал/шум.

Доведена можливість застосування числової системи залишкових класів до дійсних чисел. З єдиних методологічних засад розглянуто питання усунення багатозначності фазових вимірювань для далекомірів і пеленгаторів, в яких реалізовано принципи представлення і обчислення даних в СЗК. Наведено умови, які дають можливість звести задачу усунення неоднозначності у фазових далекомірах до задачі відновлення цілого числа, поданого залишками в СЗК. Можливість розв’язання задач багаточастотної фазової в далекометріх за допомогою використання СЗК реалізується відповідним вибором значень частот та ступенів квантування фазових зсувів гармонічних сигналів на різних частотах, узгодженими з модулями СЗК.

Доведено теорему, яка встановлює умови, необхідні і достатні для усунення багатозначності фазових вимірювань у фазовому пеленгаторі на основі використання СЗК. Можливість зведення завдання усунення багатозначності фазових вимірювань в пеленгаторах до задачі відновлення цілого числа з його представлення залишками за певною системою модулів реалізується шляхом вибору фазометричних баз антени та квантів вимірювання фазових зсувів сигналів та їх узгодженням з модулям СЗК.

Отримані нові теоретичні результати проілюстровано числовими прикладами з опрацювання даних далекоміра та пеленгатора, що реалізують багатошкальний фазовий метод вимірювання відповідно відстані і азимуту.

Отримані результати можуть бути використані для створення нових вимірювальних засобів, що реалізують фазовий метод вимірювання з покращеними характеристиками точності та завадостійкості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Пестряков В.Б. Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории) / В. Пестряков. – М.: Советское радио (Pestryakov V.B. Phazovye radiotekhnicheskie sistemy (Osnovy statisticheskoy teorii) / V. Pestryakov. – M.:Sovetskoe radio). – 1968. – 466 с/s.
2. Кинкулькин И.Е. Фазовый метод определения координат / И. Кинкулькин, В. Рубцов, М. Фабрик. – М.: Советское радио (Kinkul”kin I.E. Phazovyy metod opredeleniya koordinat / I. Kinkul”kin, V. Rubzov, M. Fabrik. – M.:Sovetskoe radio). – 1979. – 280 с/s.
3. Михеечев В.В. Геодезические светодальномеры / В. Михеечев. – М.: Недра (Mikheechev V.V. Geodezicheskie svetodal”nomery / V. Mikheechev. – M.: Nedra). – 1979. – 222 с/s.
4. Маевский С.М. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояни / С. Маевский, В. Баженов, Е. Батуревич., Ю. Куц. – К.:Вища школа (Maevskiy S.M. Primenenie metodov phazometrii dlya pretsizionnogo izmereniya rasstoyaniy / S. Maevskiy, V. Bazhenov, E Baturevich, Yu. Kuts. – K.: Vyshcha shkola). – 1983.– 83 с/s.

5. Куц Ю.В. Вимірювання кумулятивних фазових зсувів // Ю. Куц. – Технічна електродинаміка (Kuts Yu. V. Vymsryuvannya kumukyatyvnych phazovych zsuviv. – Technichna elektrodynamika). – 2001. –№5. –С/S. 67–72.
6. Денисов В.П. Фазовые радиопеленгаторы / В. Денисов, Д. Дубинин. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (Denisov V.P. Phazovye radiopelengatory / V. Denisov, D. Dubinin. – Tomskiy gosudarstvennyy unsversitet sistem upravleniya I radioelektroniki). – 2002.–251 с/s.
7. Акушский И.Я. Машинная арифметика в остаточных классах / И. Акушский, Д. Юдицкий. – М.: Советское радио (Akushskiy I. Ya. Mashinnaya arifmetika v ostatochyych klassakh /I. Akushskiy, D. Yuditskiy. – M.:Sovetskoe radio). – 1968. – 440 с/s.
8. Talor F.J. Residue arithmetic: a tutorial with examples// IEEE Comput.mag. 1984/ 17,№5, P.50.
9. Amos Omondi, Benjamin Premkumar. Residue Number Systems. Theory and Implementation. – London, Imperial College Press.–2007. –296 p.
10. Краснобаев В.А. Концепцbя создания компьютерных средств обработки данных на основе использования кодов класса вычетов // В. Краснобаев, М. Маврина, С. Кошман, В. Курчанов. – Системы обработки информации (Krasnobaev V.A. Kontseptwiya sozdaniya komp”yuternych sredstv obrabotki dannych na osnove ispok”zovaniya kodov klassa vychetov // V. Krasnobaev, M. Mavrina, S. Koshman, V. Rurchanov. – Sistevy obrabotki inforvatsii). – 2013. –№ 4 (111). –С./S. 133 -138.
11. Гужов В.И. Компьютерная интерферометрия / В. Гужов, С. Ильиных. – Новосибирск: Издательство НГТУ (Guzhov V.I. Komg’uternaya interferometriya / V. Guzhov, S. Il”inych. – Novosibirsk: Izdatel”stvo NGTU). – 2004, 252 с/s.
12. Куц Ю.В. Устранение неоднозначности фазовых измерений с использованием системы остаточных клас сов // Ю. Куц. – Вестник КПИ (Kuts Yu.V. Ustranenie neodnoznachnosti phazovykh izmereniy s ispol”zovaniem sistemy ostatochnych klassov // Yu. Kuts. – K.: Vestnik KPI). – 1984. –№.21.– С/S.39-41.
13. Куц Ю.В. Вимірювання кумулятивних фазових зсувів // Ю. Куц. – Технічна електродинаміка. (Kuts Y.V. Vymiryuvannya kumulyatyvnych phazovych zsuviv // Y.Kuts. – Technichna electrodynamica). –2001. –№5. –С./S. 67–72.
14. Куц Ю.В. Статистична фазометрія [наукова монографія] / Ю. Куц, Л. Щербак. – Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя (Kuts Yu.V. Statystychna phazometriya [naukova monografiya] / Yu. Kuts, L. Shcherbak. – Terrnopil: Ternopil”s”kyy derzhavnyy technichnyy universytetty imeni Ivana Pulyuja). – 2009. – 383 с/s.
15. Куц Ю.В. Застосування модулярної арифметики для обчислення азимута у фазових пеленгаторах // Ю. Куц, В. Куц. – К.: Вісник НТУУ "КПІ". Серія радіотехніка, радіоапаратобудування (Kuts Yu.V. Zastosuvannya modulyarnoi arufmetyky u phazovych pelenganjrach // Yu. Kuts, V. Kuts. – K.: Visnyk NTUU “KPI”. Seriya radiotechnira, radioaparatobuduvannya). – 2016.– № 64.–С/S. 23-32.